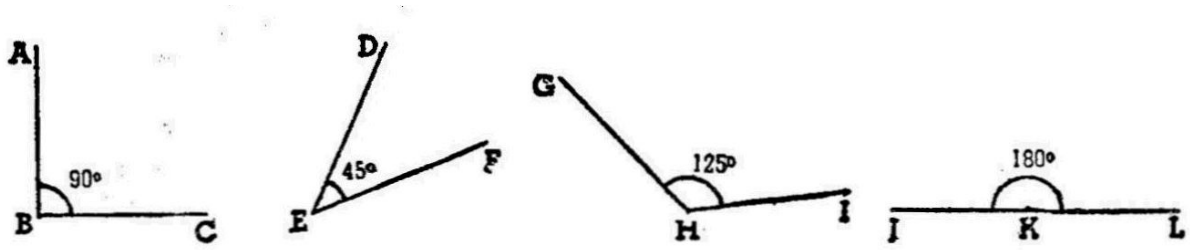
Clase de apoyo de matemáticas
Ángulos
Escuela 765
Lago Puelo – Provincia de Chubut

Este texto intenta ser un complemento de las clases de apoyo de matemáticas que se están realizando en la escuela 765 de Lago Puelo. En ningún momento pueden reemplazar a dichas clases y mucho menos a la clases regulares de dicha materia.

Apuntes

Ángulos:

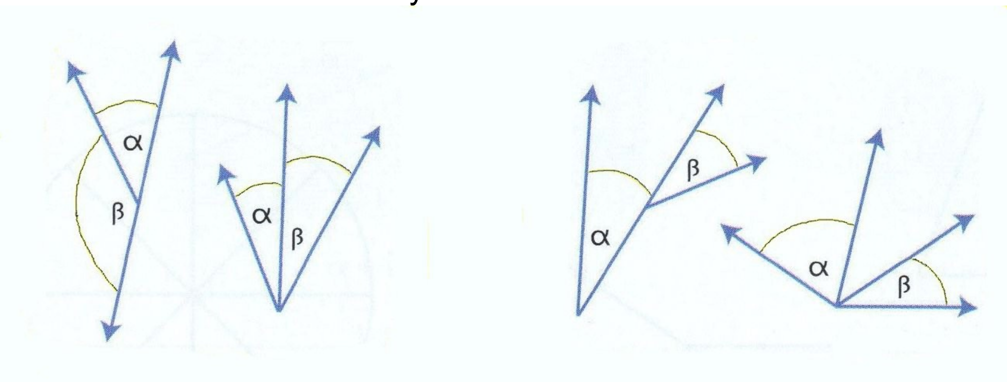
Clases de ángulos, según su medida:



ABC es recto (mide 90°). DEF es agudo (menos de 90°). GHI es obtuso (más de 90°) JKL es llano (180° = 2 rectos).

Ángulos consecutivos

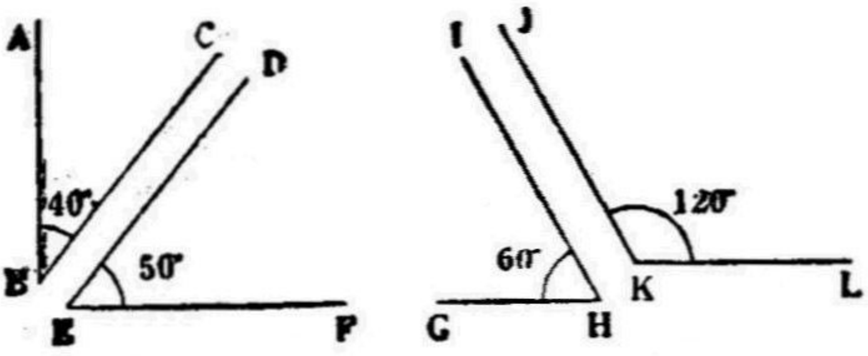
Los ángulos consecutivos tienen un lado y un vértice en común.



$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son consecutivos. $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ no son consecutivos.

Ángulos complementarios y suplementarios

Dos ángulos son complementarios cuando su suma vale un recto (90°).
Dos ángulos son suplementarios cuando su suma vale dos rectos (180°).



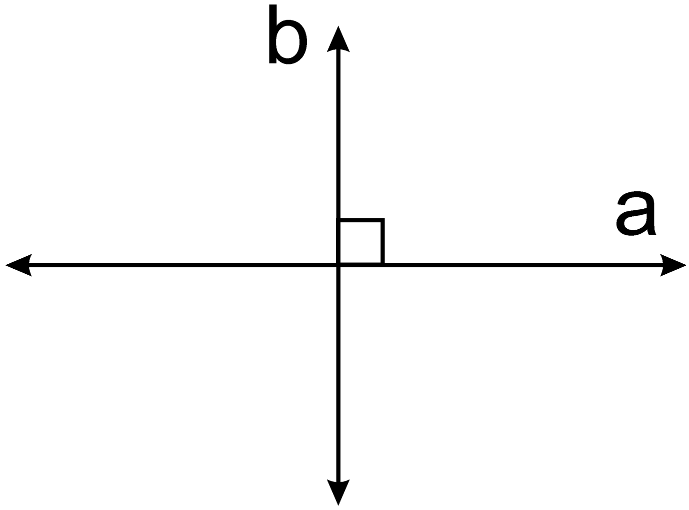
$\hat{ABC} + \hat{DEF} = 90°$; son complementarios. $\hat{GHI} + \hat{JKL} = 180°$; son suplementarios.

Ángulos opuestos por el vértice

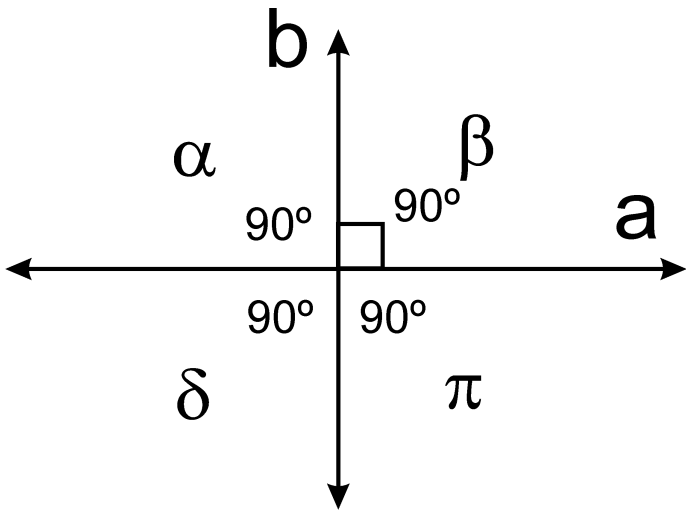
Se dice que dos ángulos opuestos por el vértice son iguales. Pero... ¿es asi? Vamos a tratar de comprobarlo.

Imaginemos una recta, a la que llamaremos **a**:

A esa recta le cruzaremos otra, llamada **b**, de forma perpendicular. Esto quiere decir que el ángulo que forme con la recta a será de 90º:



Vamos a darle nombre a cada ángulo que formen estas dos rectas: **α**, **β**, **δ** y **π**. Sabemos que **α** medirá 90º (porque las rectas son perpendiculares, como ya dijimos), pero no sólo ese ángulo, sino todos los demás, como demuestra la siguiente ilustración:



Esto no sólo se deduce a simple vista, sino que si desconfiamos de lo que vemos, podemos decir, por ejemplo, que la recta **a** forma un ángulo de 180º en el punto donde es cruzada por la recta **b**. Esto quiere decir que la suma de los ángulos **α** y **β** nos dará 180º:

$$\alpha + \beta = 180^{o}$$

Entonces, si **α** es igual a 90º:

$$90^{o} + \beta = 180^{o}$$

$$\beta = 180^{o} - 90^{o}$$

$$\beta = 90^{o}$$

El mismo razonamiento lo podremos usar para el resto de los ángulos. Asi, si **α** es igual a 90º, y la recta **b** forma un ángulo de 180º en el punto donde es cruzada por la recta **a**, entonces podremos decir que la suma de los ángulos **α** y **δ** también nos dará 180º, por lo que:

$$\alpha + \delta = 180^{o}$$

$$90^{o} + \delta = 180^{o}$$

$$\delta = 180^{o} - 90^{o}$$

$$\delta = 90^{o}$$

Y de la misma forma podremos deducir que el ángulo **π** también es de 90º.

Otra forma de deducir el valor de **π** es decir que si un giro completo es de 360º (dos ángulos llanos o de 180º), entonces la suma de los cuatro ángulos me debe dar 360º. Entonces:

$$\alpha + \beta + \delta + \pi = 360^{o}$$

$$90^{o} + 90^{o} + 90^{o} + \pi = 360^{o}$$

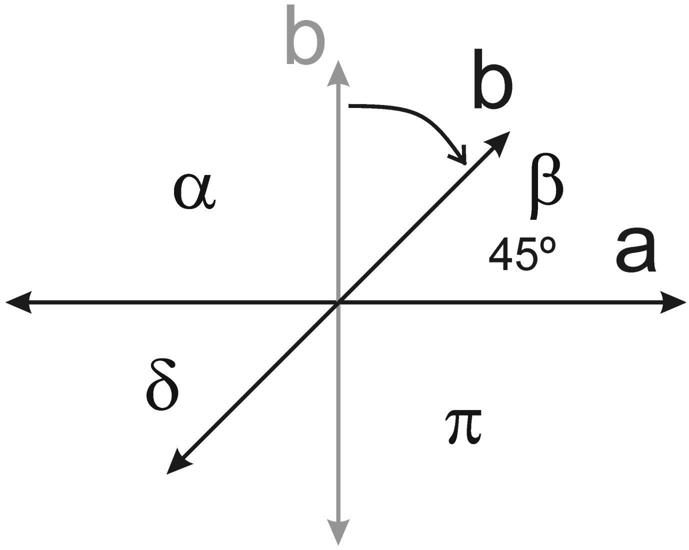
$$\pi = 360^{o} - 90^{o} - 90^{o} - 90^{o}$$

$$\pi = 90^{o}$$

De cualquier forma, llegamos a la conclusión que los cuatro ángulos son iguales (90º).

Ahora... ¿que pasará si cambiamos el valor de los ángulos?

Por ejemplo, imaginemos que a la recta **b** la rotamos unos 45º en el sentido de las agujas del reloj, de la siguiente forma:



Ahora varía el valor de los cuatro ángulos. Confirmémoslo:

Si **β** mide ahora 45º, y recordando que la suma de **α** y **β** sigue dándonos 180º, entonces:

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$
$$\alpha + 45^\circ = 180^\circ$$
$$\alpha = 180^\circ - 45^\circ$$
$$\alpha = 135^\circ$$

¿Cuánto medirá **δ** ahora?:

$$\alpha + \delta = 180^\circ$$
$$135^\circ + \delta = 180^\circ$$
$$\delta = 180^\circ - 135^\circ$$
$$\delta = 45^\circ$$

¿Y **π**?. Bueno, veámoslo de las dos formas que vimos antes:

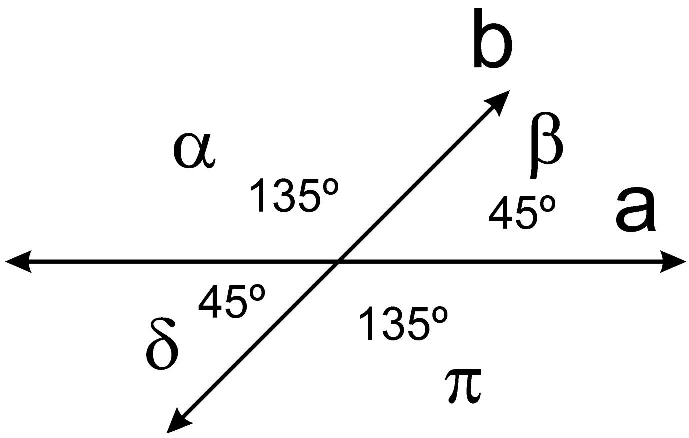
Procedimiento 1:

$$\beta + \pi = 180^\circ$$
$$45^\circ + \pi = 180^\circ$$
$$\pi = 180^\circ - 45^\circ$$
$$\pi = 135^\circ$$

Procedimiento 2:

$$\alpha + \beta + \delta + \pi = 360^\circ$$
$$135^\circ + 45^\circ + 45^\circ + \pi = 360^\circ$$
$$\pi = 360^\circ - 135^\circ - 45^\circ - 45^\circ$$
$$\pi = 135^\circ$$

Asi que, en resúmen, tendremos lo siguiente:



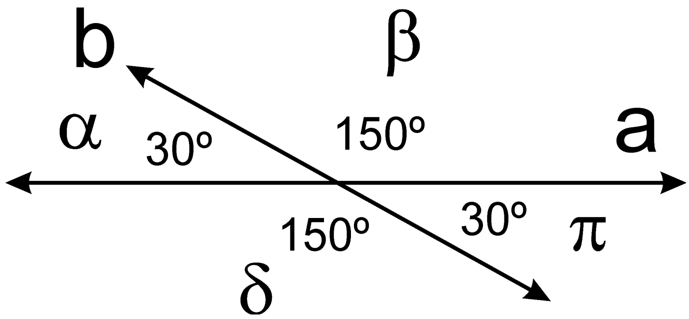
Y acá observamos un detalle: Que los cuatro ángulos ya no son iguales, sino que sólo lo son los que están opuestos por el vértice, es decir que:

$$\boldsymbol{\alpha = \pi}$$

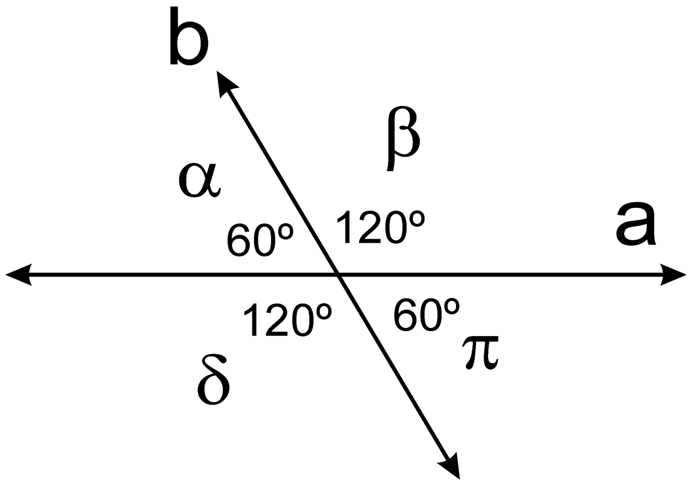
y

$$\boldsymbol{\beta = \delta}$$

¿Se cumplirá esto si seguimos variando los valores de los ángulos? Por ejemplo... ¿que pasaría si **α** midiera 30º?:



Si, se cumple. ¿Y si midiera otro valor distinto, como 60º, por ejemplo?:

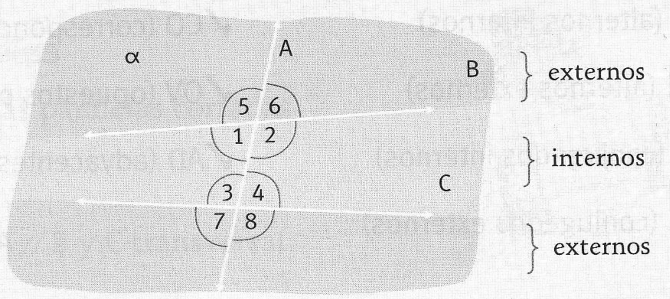


Si, se sigue cumpliendo, asi que ahora podemos confirmar que, **<u>si tenemos dos rectas que se cortan en un punto, los ángulos opuestos por el vértice que se formen serán iguales, sea el que sea el valor que tengan dichos ángulos</u>**.

Ángulos determinados por dos rectas y una transversal

Dos rectas B y C, coplanares, cortadas ambas por una tercera, llamada transversal, determinan 8 ángulos.

Los mismos se clasifican en internos y externos.

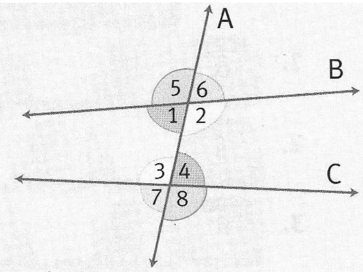


Clasificación de los 8 ángulos de acuerdo con su posición respecto de las dos rectas y la transversal

Ángulos alternos

Internos: son los pares de ángulos internos que están en distintos semiplanos respecto de la transversal y no son adyacentes. $\hat{1}$ y $\hat{4}$ $\hat{2}$ y $\hat{3}$

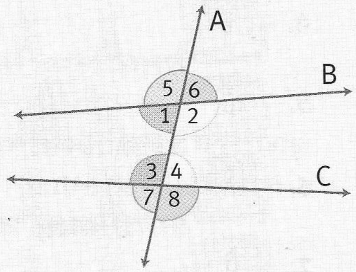
Externos: son los pares de ángulos externos que están en distintos semiplanos respecto de la transversal y no son adyacentes. $\hat{5}$ y $\hat{8}$ $\hat{6}$ y $\hat{7}$



Ángulos conjugados

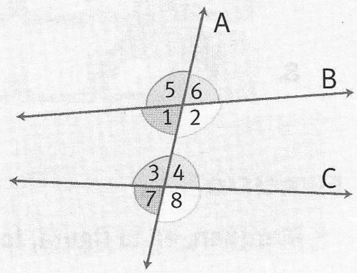
Internos: son los pares de ángulos internos que están en el mismo semiplano respecto de la transversal. $\hat{1}$ y $\hat{3}$ $\hat{2}$ y $\hat{4}$

Externos: son los pares de ángulos externos que están en el mismo semiplano respecto de la transversal. $\hat{5}$ y $\hat{7}$ $\hat{6}$ y $\hat{8}$



Ángulos correspondientes

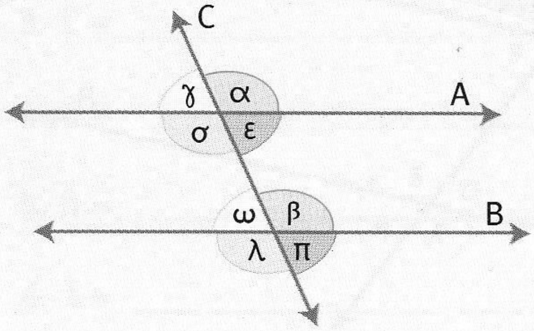
Son los pares de ángulos que están en el mismo semiplano respecto de la transversal, pero uno es interno y el otro es externo y no son adyacentes. $\hat{1}$ y $\hat{7}$ $\hat{6}$ y $\hat{4}$ $\hat{2}$ y $\hat{8}$ $\hat{5}$ y $\hat{3}$



Ángulos entre paralelas

Ángulos corespondientes entre paralelas

Los ángulos correspondientes entre rectas paralelas cortadas por una transversal son iguales.



A // B y C transversal

$\hat{\varepsilon} = \hat{\pi}$

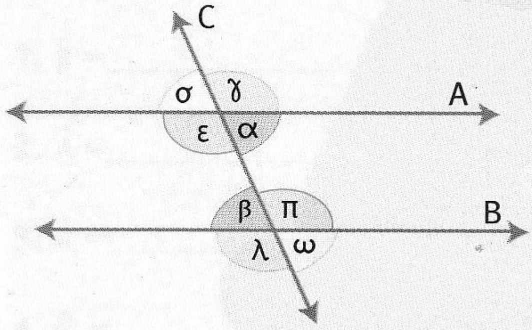
$\hat{\alpha} = \hat{\beta}$

$\hat{\gamma} = \hat{\omega}$

$\hat{\sigma} = \hat{\lambda}$

Ángulos alternos entre paralelas

Los ángulos alternos entre rectas paralelas cortadas por una transversal son iguales.



A // B y C transversal

$\hat{\alpha} = \hat{\beta}$

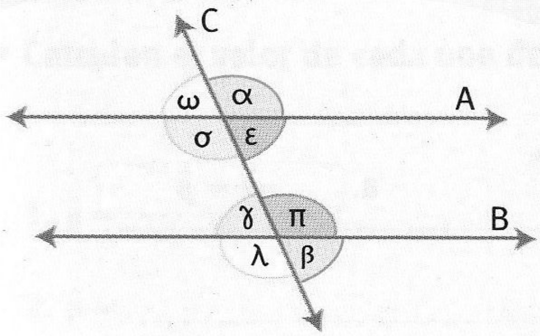
$\hat{\varepsilon} = \hat{\pi}$

$\hat{\gamma} = \hat{\lambda}$

$\hat{\sigma} = \hat{\omega}$

Ángulos conjugados entre paralelas

Los ángulos conjugados entre rectas paralelas cortadas por una transversal son suplementarios.



A // B y C transversal

$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^{\circ}$

$\hat{\varepsilon} + \hat{\pi} = 180^{\circ}$

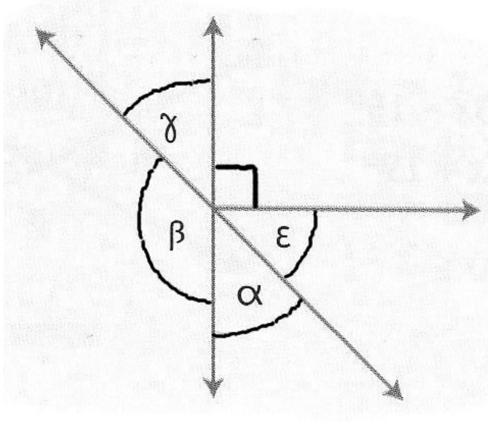
$\hat{\lambda} + \hat{\omega} = 180^{\circ}$

$\hat{\sigma} + \hat{\gamma} = 180^{\circ}$

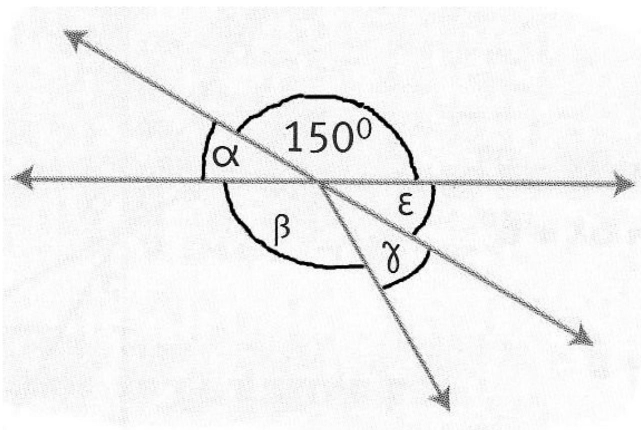
Ejercicios

Ángulos opuestos por el vértice

Hallar el valor de cada uno de los ángulos en las siguientes figuras:



$\hat{\alpha} = \hat{\varepsilon}$



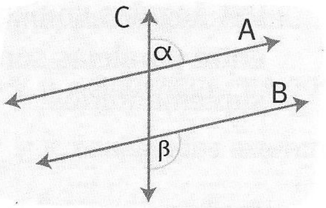
$\hat{\varepsilon} = \hat{\gamma}$

Paralelas y transversal

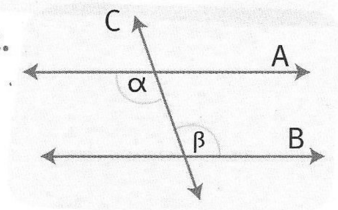
Unir cada uno de los siguientes dibujos con la propiedad correspondiente:

A // B y C transversal

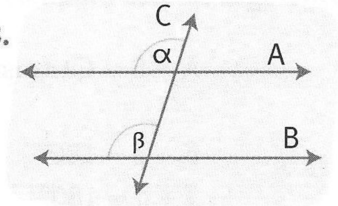
1.



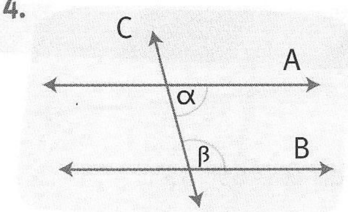
2.



3.



4.

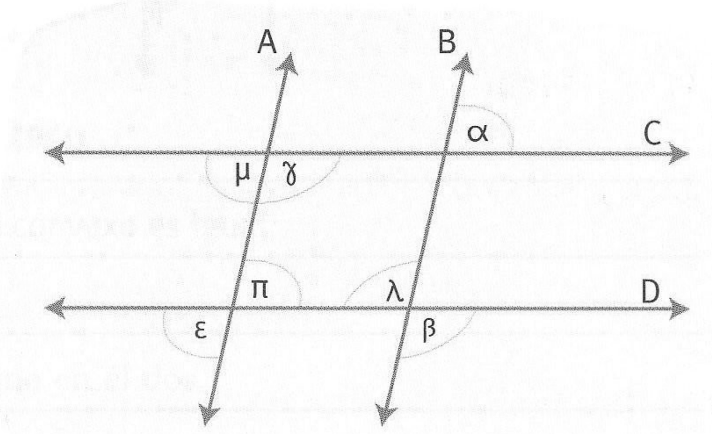


a. $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$

b. $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180°$

Calcular el valor de cada uno de los ángulos, justificando la respuesta:

A // B y C // D $\hat{\alpha} = 65°$



A // B // C y D transversal $\hat{\alpha} = 107°$